

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2022-2023 г.г. по математике

Отборочный этап

7 класс

Решения

**7.1.** В верном числовом равенстве одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные — разными. Известно, что получилось

$$\text{Я} + \text{ДЕД} = \text{ТЫ} + \text{НЕТ}.$$

Приведите вариант исходного равенства. (Достаточно привести один пример.)

**Решение.** Например, подходит

$$3 + 202 = 96 + 109$$

**Критерии.** Любой верный пример — 7 баллов.

**7.2.** Из Новосибирска в Павлодар выехал автобус с программистами. Когда он проехал 70 км, по тому же маршруту из Новосибирска отправился на машине Павел Викторович, который догнал программистов в Карасуке. После этого Павел проехал ещё 40 км, а автобус за то же время — всего 20 км. Найдите расстояние от Новосибирска до Карасука, если и машина, и автобус ехали с постоянными скоростями. (Приведите полное решение, а не только ответ.)

**Решение.** Так как за то время, пока машина проехала 40 км, автобус проехал в два раза меньше, его скорость в точности в два раза меньше скорости машины. Но тогда, когда автобус проедет 70 км после выезда машины, та проедет 140 и как раз догонит автобус. По условию это произошло в Карасуке, значит, 140 км и есть ответ.

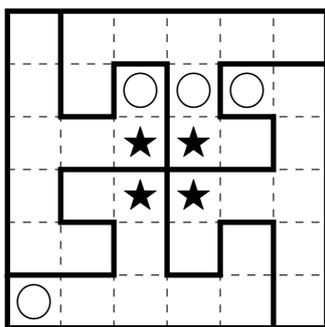
**Критерии.** Только ответ — 1 балл.

Ответ с проверкой (например, для конкретных скоростей) — 2 балла.

Доказано, что скорость машины в два раза больше скорости автобуса — 3 балла.

**7.3.** Разрежьте данный квадрат  $6 \times 6$  по линиям сетки на четыре равные части таким образом, чтобы каждая из них содержала ровно один кружок и ровно одну звёздочку. (Достаточно привести один пример. Напомним, что фигуры являются равными, если их можно совместить наложением.)

**Решение.** Пример разрезания изображён ниже.



**Критерии.** Любое верное разрезание — 7 баллов (хотя есть подозрение, что приведённое разрезание является единственно возможным).

**7.4.** На некотором острове живёт 2022 человека, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда врёт. Однажды все жители этого острова встали в круг, и им по очереди был задан вопрос «Является ли лжецом твой сосед слева?», на который суммарно было получено 2 ответа «Да» и 2020 ответов «Нет». После этого всем был задан вопрос «Является ли лжецом твой сосед справа через одного?», на которой тоже было получено 2 ответа «Да» и 2020 ответов «Нет». Сколько ответов «Да» будет получено, если всех спросить «Является ли лжецом человек, стоящий в круге напротив тебя?»? (*Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.*)

**Решение.** Будем обозначать рыцарей и лжецов через  $R$  и  $L$  соответственно. Заметим, что в паре соседних  $RR$  или  $LL$  правый человек не может сказать, что слева стоит лжец. Значит, на первый вопрос положительно могли ответить только в парах  $RL$  и  $LR$ . Но это значит, так как ответов «Да» было два, что весь круг представляет одну группу подряд идущих лжецов и одно группу подряд идущих рыцарей (а на двух стыках этих групп и прозвучало «Да»).

Рассмотрим теперь второй вопрос. Нам уже понятно, что и рыцарей, и лжецов есть хотя бы по одному человеку. Предположим, что и рыцарей, и лжецов хотя бы два. Тогда «Да» скажут два самых правых рыцаря и два самых правых лжеца. То есть, ответов будет уже четыре, что противоречит условию. Значит, либо рыцарей, либо лжецов всего один человек.

На третий вопрос «Да» ответят только рыцарь и лжец, стоящие друг напротив друга. Но из предыдущего абзаца мы уже знаем, что такая пара только одна, поэтому ответов «Да» опять будет два.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов.

Только ответ с примером конкретной расстановки — 1 балл.

Доказательство первого абзаца — 3 балла.

Доказательство второго абзаца — ещё 3 балла.

**7.5.** Дана пустая клетчатая доска  $3 \times 3$ . За один ход разрешается выбрать любые три клетки, образующие уголок (повёрнутый как угодно), и положить в них по одной шашке. Может ли через несколько ходов оказаться, что во всех клетках лежит одинаковое (ненулевое) количество шашек? (*Обоснуйте свой ответ.*)

**Решение.** Предположим, это возможно, и через несколько ходов в каждой клетке будет лежать по  $n$  шашек. Тогда всего на доске их  $9n$ , а так как на каждом ходу их добавляется по три штуки, сделано было  $3n$  ходов. Но заметим, что в каждую из четырёх угловых клеток мы можем класть шашки только отдельными ходами, так как никакой уголок не содержит сразу двух из них. Значит, в каждый из углов было положено  $n$  раз отдельными ходами, то есть, всего было сделано хотя бы  $4n$  ходов, что противоречит предыдущим рассуждениям. Значит, предположение неверно, и указанная ситуация невозможна.